

## ОТЗЫВ

**официального рецензента на диссертационную работу Досмағұловой Қарлығаш Алматқызы на тему:  
«Корректно разрешимые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами», представленной на соискание  
степени доктора философии (PhD) по специальности «8D05401 – Математика»**

№ п/п	Критерии	Соответствие критериям (подчеркнуть один из вариантов ответа)	Обоснование позиции официального рецензента (замечания выделить курсивом)
1.	Тема диссертации (на дату ее утверждения) соответствует направлениям развития науки и/или государственным программам	1.1 Соответствие приоритетным направлениям развития науки или государственным программам:	4. Интеллектуальный потенциал страны. 4.5. Фундаментальные и прикладные исследования области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии
		1) диссертация выполнена в рамках проекта или целевой программы, финансируемого(ой) из государственного бюджета (указать название и номер проекта или программы);	Диссертация выполнена в рамках научного проекта грантового финансирования молодых ученых по проекту «Жас Ғалым» Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан на 2024-2026 годы «Корректная задача для дифференциальных операторов на римановом многообразии» (2024-2026 годы, АП АП22685565) и соответствует направлениям развития науки по приоритету: «Интеллектуальный потенциал страны», по под приоритетному: «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии».
		2) диссертация выполнена в рамках другой государственной программы (указать название программы);	
		<b><u>3) диссертация соответствует приоритетному направлению развития науки, утвержденному Высшей научно-технической комиссией при Правительстве Республики Казахстан (указать направление).</u></b>	
2.	Важность для науки	Работа <b>вносит</b> /не вносит существенный вклад в науку, а ее важность хорошо <b>раскрыта</b> /не раскрыта.	Диссертационная работа исследователя посвящена актуальной и важной проблеме спектральной теории дифференциальных операторов. Она относится к фундаментальным разделам дифференциальных уравнений в частных производных и уравнениям математической физики. Результаты диссертации имеют значимость для дальнейшего развития теории эллиптических операторов на римановых

			<p>многообразиях, а также для приложений в квантовой механике. Введение новых корректных постановок задач и доказательство дискретности спектра для возмущённых операторов открывают новые перспективы для исследований в смежных областях. Результаты исследования <b>вносят определенный вклад</b> в теорию дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Важность результатов <b>полностью раскрыта</b>.</p>
3.	Принцип самостоятельности	Уровень самостоятельности:	<p>Из представленного списка научных трудов видно, что основные результаты диссертационной работы опубликованы в ведущих научных журналах, индексируемых в базах Web of Science (Q1, Q4) и Scopus, а также представлены на международных конференциях.</p> <p>Большинство статей выполнено <b>в соавторстве с научным руководителем</b>, что является обычной практикой для исследований подобного уровня. Анализ содержания публикаций, отражающих ключевые положения диссертации, показывает, что <b>основные результаты и доказательства принадлежат автору диссертации — Досмагуловой</b>. В работах прослеживается её самостоятельный подход к постановке задач, формулировке теорем и доказательству новых утверждений в области спектральной теории дифференциальных операторов.</p> <p>Таким образом, можно заключить, что диссертантка проявила <b>высокий уровень самостоятельности</b> при выполнении научных исследований, получении результатов и подготовке публикаций.</p>
		1) <b><u>высокий</u></b> ;	
		2) средний;	
		3) низкий;	
		4) самостоятельности нет.	

4.	Принцип внутреннего единства	4.1 Обоснование актуальности диссертации:	<p>Актуальность темы диссертационной работы <b>обоснована</b>.</p> <p>Диссертация посвящена актуальной проблеме спектрального анализа и корректных постановок задач для операторов Лапласа–Бельтрами и гармонического осциллятора с <math>\delta</math>-образными возмущениями на римановых многообразиях различной размерности.</p> <p>В <b>первой главе</b> получены результаты по построению и исследованию дельтаобразных возмущений оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере, определены максимальный оператор и его ограничения, построена функция Грина возмущённого оператора, что создает основу для последующих постановок корректных задач.</p> <p>Во <b>второй главе</b> рассмотрены корректно разрешимые задачи для уравнения Лапласа–Бельтрами на сфере с удалённой дугой (разрезом), установлены дополнительные условия на границе, обеспечивающие единственность решения.</p> <p>В <b>третьей главе</b> исследованы корректные постановки задач для оператора Лапласа–Бельтрами на трёхмерной сфере с разрезом по окружности. Показано, что предложенные методы корректного ограничения оператора сохраняют применимость в более сложных геометрических конфигурациях.</p> <p>В <b>четвёртой главе</b> проведён спектральный анализ возмущённого оператора Лапласа–Бельтрами, доказано свойство дискретности его спектра и описана система собственных функций. Дополнительно исследованы возмущённые гармонические осцилляторы, установлена связь</p>
		1) <b>обоснована;</b>	
		2) частично обоснована;	
		3) не обоснована.	

			<p>между их спектральными характеристиками и невозмущёнными операторами.</p> <p>Результаты диссертации являются логически взаимосвязанными, демонстрируют внутреннее единство исследования и подтверждают его высокую научную актуальность. Работа выполняет переход от локальных моделей к общим случаям и раскрывает универсальность методов анализа возмущённых операторов.</p> <p>Таким образом, актуальность диссертационной работы <b>полностью обоснована</b>.</p>
		4.2 Содержание диссертации отражает тему диссертации:	<p>Все главы работы непосредственно связаны с основной идеей диссертации — изучением корректных постановок и спектральных свойств операторов Лапласа–Бельтрами и их возмущений на римановых многообразиях различной размерности. Исследование охватывает как теоретические аспекты построения корректных ограничений операторов, так и анализ их спектральных характеристик, что полностью соответствует теме «<i>Корректная задача для дифференциальных операторов на римановом многообразии</i>».</p> <p>В работе обеспечена преемственность между разделами: переход от двумерной сферы к трёхмерной, а затем к гармоническому осциллятору демонстрирует реализацию общей концепции и развитие единого методологического подхода. Структура, методы и полученные результаты полностью соответствуют содержанию и направлению заявленной темы.</p> <p>Таким образом, содержание диссертации <b>отражает</b> заявленную тему исследования.</p>
		1) <b>отражает;</b>	
		2) частично отражает;	
		3) не отражает.	

		4.3. Цель и задачи соответствуют теме диссертации:	Сформулированная в диссертации цель — разработка и исследование корректных постановок задач для дифференциальных операторов, в частности оператора Лапласа–Бельтрами, на римановых многообразиях и изучение их спектральных свойств — полностью отражает содержание темы « <i>Корректная задача для дифференциальных операторов на римановом многообразии</i> ».
		1) <u>соответствуют</u> ;	
		2) частично соответствуют;	
		3) не соответствуют.	
			Определённые автором задачи, направленные на построение функций Грина, исследование корректных ограничений операторов, анализ краевых задач на сферах с проколами и разрезами, а также изучение дискретности спектра возмущённых операторов, логично вытекают из поставленной цели и обеспечивают её полную реализацию.
			Таким образом, цели и задачи диссертационной работы <b>в полной мере соответствуют её теме.</b>
		4.4 Все разделы и положения диссертации логически взаимосвязаны:	Все разделы и положения диссертационной работы <b>полностью взаимосвязаны.</b> Диссертация построена последовательно и логично: каждая глава естественным образом продолжает предыдущую и направлена на развитие единой научной концепции — исследование корректных постановок и спектральных свойств операторов Лапласа–Бельтрами и их возмущений на римановых многообразиях. В первой главе заложены теоретические основы, во второй — рассмотрены частные случаи корректных задач, в третьей — методы обобщаются на более сложные геометрические области, а в четвёртой — проводится спектральный анализ, завершающий и подтверждающий общие результаты. Такая <b>Вывод:</b>
		1) <u>полностью взаимосвязаны</u> ;	
		2) взаимосвязь частичная;	
		3) взаимосвязь отсутствует.	

			все разделы и положения диссертации полностью взаимосвязаны.
		4.5 Предложенные автором новые решения (принципы, методы) аргументированы и оценены по сравнению с известными решениями:	<p>В диссертационной работе представлен <b>критический анализ</b> известных результатов и аргументированное сравнение предложенных автором подходов с существующими в научной литературе.</p> <p>Автор проводит анализ известных постановок корректных задач для операторов Лапласа–Бельтрами и их возмущений, выявляя их ограничения и предлагая собственные решения, основанные на новых методах построения функций Грина и корректных ограничений операторов. В работе продемонстрирована самостоятельность и оригинальность подхода: предложенные методы позволяют обобщить класс корректно разрешимых задач и расширить спектральные результаты для операторов на римановых многообразиях.</p> <p>Таким образом, в диссертации присутствует критический анализ существующих решений, а новые методы и принципы аргументированы и сопоставлены с известными результатами.</p> <p><b>Вывод:</b> <i>Критический анализ есть.</i></p>
		1) <b><u>критический анализ есть;</u></b>	
		2) анализ частичный;	
		3) анализ представляет собой не собственные мнения, а цитаты других авторов;	
		4) анализ отсутствует.	
5.	Принцип научной новизны	5.1 Научные результаты и положения являются новыми?	<p>Научные результаты и положения диссертационной работы являются <b>полностью новыми</b>.</p> <p>Диссертация содержит обоснованные и оригинальные решения, связанные с исследованием оператора Лапласа–Бельтрами и его возмущений в различных геометрических конфигурациях. Автор впервые поставлены и исследованы новые типы корректных граничных задач, построены функции Грина для возмущённых операторов, доказаны свойства дискретности спектра, а также проведён</p>
		1) <b><u>полностью новые;</u></b>	
		2) частично новые (новыми являются 25-75%);	
		3) не новые (новыми являются менее 25%).	

			<p>спектральный анализ операторов с <math>\delta</math>-образными возмущениями.</p> <p>Полученные результаты не сводятся к модификации или пересказу известных подходов, а представляют собой самостоятельный вклад в развитие математической теории дифференциальных операторов и спектрального анализа на римановых многообразиях.</p>
		5.2 Выводы диссертации являются новыми?	Выводы, сформулированные в диссертационной работе, являются <b>полностью новыми</b> .
		1) <b>полностью новые;</b>	Они опираются на оригинальные результаты, полученные автором в ходе исследования, и отражают новые постановки задач, обоснование корректности их решений, а также результаты спектрального анализа возмущённых операторов Лапласа–Бельтрами и гармонического осциллятора. Выводы не повторяют известных положений, а представляют собой самостоятельные научные обобщения, полученные в результате оригинального подхода к решению задач спектральной теории и анализа дифференциальных операторов на римановых многообразиях. Полученные автором выводы имеют значение для дальнейшего развития математической теории корректных задач и спектральных методов.
		2) частично новые (новыми являются 25-75%);	
		3) не новые (новыми являются менее 25%).	
		5.3 Технические, технологические, экономические или управленческие решения являются новыми и обоснованными:	Предложенные в диссертации решения являются <b>полностью новыми</b> и обоснованными.
		1) <b>полностью новые;</b>	Несмотря на теоретико-математическую направленность исследования, автором разработаны новые методы анализа и постановки корректных задач, обладающие потенциалом применения при решении прикладных проблем спектральной теории и математической физики. Полученные результаты
		2) частично новые (новыми являются 25-75%);	
		3) не новые (новыми являются менее 25%).	

			<p>могут быть использованы при математическом моделировании физических процессов, описываемых уравнениями с операторами Лапласа–Бельтрами и их возмущениями.</p> <p>Предложенные подходы отличаются оригинальностью, строгостью обоснований и обладают практической значимостью для дальнейшего развития как фундаментальных, так и прикладных направлений анализа дифференциальных операторов.</p>
6.	Обоснованность основных выводов	<p>Все основные выводы <b>основаны</b>/не основаны на весомых с научной точки зрения доказательствах либо достаточно хорошо обоснованы (для qualitative research (квалитатив ресеч) и направлений подготовки по искусству и гуманитарным наукам).</p>	<p>Все основные выводы диссертации <b>основаны</b> на весомых с научной точки зрения доказательствах и достаточно хорошо обоснованы.</p>
7.	Основные положения, выносимые на защиту	Необходимо ответить на следующие вопросы по каждому положению в отдельности:	<p>Положения, выносимые на защиту:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Построены и исследованы корректные постановки задач для возмущённых операторов; Лапласа–Бельтрами на римановых многообразиях</li> <li>- Построены функции Грина для возмущённого оператора Лапласа–Бельтрами;</li> <li>- Исследованы корректные постановки задач для уравнения Лапласа–Бельтрами на трёхмерной сфере с разрезом по окружности;</li> <li>- Проведены спектральный анализ возмущённых операторов Лапласа–Бельтрами и гармонического осциллятора;</li> <li>- Определены инвариантность спектра оператора Лапласа–Бельтрами относительно изометрий;</li> </ul> <p>Все основные положения, выносимые на защиту, доказаны, являются нетривиальными и новыми.</p>
		7.1 Доказано ли положение?	
		1) <u><b>доказано;</b></u>	
		2) скорее доказано;	
		3) скорее не доказано;	
		4) не доказано;	
		5) в текущей формулировке проверить доказанность положения невозможно.	



			Итог по 7.1: <b>1) доказано.</b>
		7.2 Является ли тривиальным?	Все основные положения, выносимые на защиту, не являются тривиальными. Итог по 7.2: <b>2) нет</b>
		1) да;	
		2) <b>нет</b> ;	
		3) в текущей формулировке проверить тривиальность положения невозможно.	
		7.3 Является ли новым?	Все основные положения, выносимые на защиту, являются новыми. Итог по 7.3: <b>1) да</b>
		1) <b>да</b> ;	
		2) нет;	
		3) в текущей формулировке проверить новизну положения невозможно.	
		7.4 Уровень для применения:	Уровень применения основных положений можно охарактеризовать как <b>широкий</b> . Результаты диссертации могут быть использованы не только в рамках чисто теоретических исследований спектральной теории и операторного анализа, но и при решении прикладных задач математической физики, например, при изучении квантово механических систем с точечными и сингулярными возмущениями.
		1) узкий;	
		2) средний;	
		3) <b>широкий</b> ;	
		4) в текущей формулировке проверить уровень применения положения невозможно.	Все основные положения, выносимые на защиту, опубликованы и <b>доказаны</b> в статьях автора. Результаты проведенных исследований опубликованы в 7 работ. В частности, в журналах входящих в базу данных Scopus, имеющих процентиль более 50 и в журналах входящий в перечень КОКСОН МНВО РК.
		7.5 Доказано ли в статье?	
		1) <b>да</b> ;	
		2) нет;	
		3) в текущей формулировке проверить доказанность положения в статье невозможно.	
8.	Принцип достоверности.	8.1 Выбор методологии - обоснован или методология достаточно подробно описана:	Выбор методологии <b>обоснован</b> , и методология достаточно подробно описана. В диссертации

	Достоверность источников и предоставляемой информации	1) <u>да</u> ;	выбранные методы исследования (анализ дифференциальных операторов, теория самосопряжённых расширений, спектральный анализ) аргументированы и описаны достаточно подробно для воспроизводимости результатов. Обоснованность методологии подтверждается ссылками на авторитетные научные источники и строгим математическим аппаратом. Итог по 8.1: <b>1) да</b>
		2) нет.	
		8.2 Результаты диссертационной работы получены с использованием современных методов научных исследований и методик обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий:	В исследовании применяются современные математические методы анализа операторов и спектральной теории, а также компьютерные технологии для проведения расчётов и численных экспериментов. Использование таких подходов обеспечивает высокую достоверность и воспроизводимость полученных результатов.  Итоговый выбор: <b>1) да.</b>
		1) <u>да</u> ;	
		2) нет.	
		8.3 Теоретические выводы, модели, выявленные взаимосвязи и закономерности доказаны и подтверждены экспериментальным исследованием (для направлений подготовки по педагогическим наукам результаты доказаны на основе педагогического эксперимента):	
		1) <u>да</u> ;	В диссертации все теоретические результаты строго обоснованы с использованием современного математического аппарата и доказательств. Для данного направления исследования эксперимент в классическом смысле не является необходимым, так как подтверждение достоверности осуществляется через строгое математическое доказательство и логическую проверку полученных результатов.
		2) нет.	
		8.4 Важные утверждения <u>подтверждены</u> /частично подтверждены/не подтверждены ссылками на актуальную и достоверную научную литературу.	В диссертации приведены ссылки на современные и авторитетные научные источники, что обеспечивает обоснованность теоретических положений и <b>подтверждает</b> достоверность полученных

			результатов. Используемая литература охватывает как классические работы по спектральной теории и операторному анализу, так и актуальные публикации последних лет.
		8.5 Используемые источники литературы <u>достаточны</u> /не достаточны для литературного обзора.	<p>В диссертации использованы 62 источника литературы, охватывающих широкий круг научных публикаций, включая как классические фундаментальные работы по спектральной теории дифференциальных операторов, так и современные исследования, посвящённые возмущённым операторам, корректным постановкам задач и их приложениям в математической физике. Подбор источников отличается полнотой и научной релевантностью: он обеспечивает целостное представление о современном состоянии рассматриваемой проблемы, позволяет провести критический анализ существующих подходов и убедительно обосновать научную новизну полученных результатов.</p> <p><b>Итоговый вывод:</b> использованные источники литературы — <b>достаточны</b> для литературного обзора.</p>
9	Принцип практической ценности	9.1 Диссертация имеет теоретическое значение:	<p>Исследование вносит вклад в развитие спектральной теории и теории дифференциальных операторов, расширяет представления об операторе Лапласа–Бельтрами в областях с особенностями, а также обосновывает новые постановки и методы анализа. Полученные результаты имеют фундаментальный характер и могут служить основой для дальнейших теоретических исследований в математике и математической физике.</p>
		1) <u>да</u> ;	
		2) нет.	

		9.2 Диссертация имеет практическое значение и существует высокая вероятность применения полученных результатов на практике:	Разработанные в работе методы исследования операторов Лапласа–Бельтрами с особенностями могут быть использованы при моделировании процессов в математической физике, квантовой механике и смежных областях. Это подтверждает как фундаментальную, так и прикладную ценность исследования.
		1) <u>да</u> ;	
		2) нет.	
		9.3 Предложения для практики являются новыми:	Практические предложения, вытекающие из результатов диссертации, связаны с разработкой и применением новых методов анализа операторов Лапласа–Бельтрами с особенностями и возмущённых операторов. Эти методы могут использоваться в задачах математической физики и смежных дисциплин, что обеспечивает новизну и прикладную ценность предложений.
		1) <u>полностью новые</u> ;	
		2) частично новые (новыми являются 25-75%);	
		3) не новые (новыми являются менее 25%).	
10.	Качество написания и оформления	Качество академического письма:	Качество академического письма <b>высокое</b> , результаты и исследования представлены ясно, оформление работы соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям.
		1) <u>высокое</u> ;	
		2) среднее;	
		3) ниже среднего;	
		4) низкое.	
11.	Замечания к диссертации	По оформлению и по полученным результатам существенных замечаний и недостатков в работе не выявлено.	
12.	Научный уровень статей докторанта по теме исследования (в случае защиты диссертации в форме серии статей официальные рецензенты комментируют научный уровень каждой статьи докторанта по теме исследования)	Публикации докторанта соответствуют теме диссертационного исследования и отражают его основные научные результаты. Статьи опубликованы в рецензируемых международных журналах, индексируемых в базах <b>Scopus</b> и <b>Web of Science (Q1–Q4)</b> . Работы отличаются высоким теоретическим уровнем, строгим математическим обоснованием и соответствуют международным стандартам научных публикаций. <b>Оценка:</b> научный уровень статей — <b>высокий</b> .	

